

# Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis

Alena Pirutka

17 mai 2010

## Résumé

En utilisant la construction de Colliot-Thélène et Ojanguren, on donne un exemple d'une variété projective et lisse géométriquement rationnelle  $X$ , définie sur un corps fini  $\mathbb{F}_p$ , telle que d'une part le groupe  $H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Z}/2)$  est non nul et, d'autre part, l'application  $CH^2(X) \rightarrow CH^2(X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p)^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$  n'est pas surjective.

## Abstract

Using the construction of Colliot-Thélène and Ojanguren, we exhibit an example of a smooth projective geometrically rational variety  $X$  defined over a finite field  $\mathbb{F}_p$  with an algebraic closure  $\bar{\mathbb{F}}_p$ , such that the group  $H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Z}/2)$  is nonzero and the map  $CH^2(X) \rightarrow CH^2(X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p)^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$  is not surjective.

Soit  $\mathbb{F}_p$  un corps fini de cardinal  $p$ . Soit  $\bar{\mathbb{F}}_p$  une clôture algébrique de  $\mathbb{F}_p$  et soit  $G = \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$  le groupe de Galois absolu. Soit  $X$  une  $\mathbb{F}_p$ -variété projective et lisse, géométriquement connexe, de dimension  $d$  et soit  $\bar{X} = X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p$ . On dispose d'une application naturelle

$$CH^i(X) \rightarrow CH^i(\bar{X})^G$$

entre les groupes de Chow des cycles de codimension  $i$  sur  $X$  (resp. sur  $\bar{X}$ ) modulo l'équivalence rationnelle. Cette application est surjective pour  $i = 0, 1, d$  (cf. remarque 3.1). Suivant Geisser [G], on s'intéresse à savoir s'il en est ainsi pour  $2 \leq i < d$ .

Dans cet article, on donne un contre-exemple pour  $i = 2$ . Dans ce cas, des arguments de  $K$ -théorie algébrique (cf. [K]) permettent de faire un lien entre le conoyau de l'application  $CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G$  et le groupe de cohomologie non ramifiée  $H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ . On montre qu'il suffit d'assurer que ce dernier groupe est non nul (cf. section 2). Pour ce faire, les techniques développées par Colliot-Thélène et Ojanguren [CTOj] sont disponibles. En utilisant leur méthode, on construit ainsi (cf. section 3) une variété projective lisse  $X$  géométriquement connexe définie sur un corps fini  $\mathbb{F}_p$  convenable, telle que

l'application  $CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G$  n'est pas surjective.

Plus précisément,  $X$  est une variété géométriquement rationnelle de dimension 5, admettant un morphisme vers  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^2$  à fibre générique une quadrique lisse «voisine» de Pfister. Notre méthode permet d'obtenir de tels exemples sur des corps finis  $\mathbb{F}_p$  pour une infinité de nombres premiers  $p$ .

**Remerciements :** Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Jean-Louis Colliot-Thélène, pour m'avoir suggéré d'utiliser les méthodes de [CTOj] et m'avoir introduite dans le sujet ; sans ses nombreux conseils et réponses cet article n'aurait pas pu voir le jour.

## 1 Notations et rappels

### 1.1 Notations

Étant donné un corps  $k$ , on note  $k^*$  le groupe multiplicatif  $k - \{0\}$ ,  $\bar{k}$  une clôture séparable de  $k$  et  $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$  le groupe de Galois absolu. On note  $\mathbb{F}_p$  le corps fini de cardinal  $p$ .

Si  $X$  est une variété algébrique définie sur un corps  $k$ , on note  $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ . Si  $X$  est intègre, on note  $k(X)$  son corps des fractions et si  $X$  est géométriquement intègre, on note  $\bar{k}(X)$  le corps des fractions de  $\bar{X}$ . On dit que  $X$  est  $k$ -rationnelle si  $X$  est birationnelle à  $\mathbb{P}_k^n$  et on dit que  $X$  est géométriquement rationnelle si  $\bar{X}$  est  $\bar{k}$ -rationnelle.

Pour une  $k$ -variété intègre  $X$  et  $i$  un entier, on note  $X^{(i)}$  l'ensemble des points de  $X$  de codimension  $i$  et on note  $CH^i(X)$  le groupe des cycles de codimension  $i$  modulo l'équivalence rationnelle.

Si  $A$  est un groupe abélien et  $n$  est un entier, on note  $A[n]$  le sous-groupe de  $A$  formé par les éléments annulés par  $n$ . Pour  $l$  un nombre premier, on note  $A\{l\}$  le sous-groupe de torsion  $l$ -primaire.

Pour  $M$  un  $G$ -module continu discret on note  $H^i(k, M) = H^i(G, M)$  le  $i$ -ème groupe de cohomologie galoisienne et on note  $M^G = H^0(k, M)$  le sous-groupe formé par les éléments invariants par  $G$ .

### 1.2 Rappels de cohomologie étale

Étant donné un corps  $k$  et un entier  $n$  inversible sur  $k$ , on note  $\mu_n$  le  $k$ -schéma en groupes (étale) des racines  $n$ -ièmes de l'unité. Pour  $j$  un entier positif, on note  $\mu_n^{\otimes j} = \mu_n \otimes \dots \otimes \mu_n$  ( $j$  fois). On pose  $\mu_n^{\otimes j} = \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\mu_n^{\otimes(-j)}, \mathbb{Z}/n)$  si  $j$  est négatif et  $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/n$ . Ces  $k$ -schémas en groupes donnent des faisceaux étales, notés encore  $\mu_n^{\otimes j}$ , sur toute  $k$ -variété  $X$ . On note  $H^i(X, \mu_n^{\otimes j})$  les groupes de cohomologie étale de  $X$  à valeurs dans  $\mu_n^{\otimes j}$ . Lorsque  $n = 2$ , on a un isomorphisme canonique  $\mu_2^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2$  pour tout  $j$ .

**Définition 1.1.** Pour  $X$  une  $k$ -variété intègre, un entier naturel  $j \geq 1$  et un entier relatif  $i$ , on définit les groupes de cohomologie *non ramifiée*

$$H_{\text{nr}}^j(X, \mu_n^{\otimes i}) \stackrel{\text{déf}}{=} H_{\text{nr}}^j(k(X)/k, \mu_n^{\otimes i}) = \bigcap_A \text{Ker}[H^j(k(X), \mu_n^{\otimes i}) \xrightarrow{\partial_{j,A}} H^{j-1}(k_A, \mu_n^{\otimes i-1})].$$

Dans cette formule,  $A$  parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un, de corps des fractions  $k(X)$ , contenant le corps  $k$ . Le corps résiduel d'un tel anneau  $A$  est noté  $k_A$  et l'application  $\partial_{j,A}$  est l'application résidu.

Lorsque  $X$  est propre et lisse, les résultats de Bloch et Ogus permettent d'identifier le groupe  $H_{\text{nr}}^j(X, \mu_n^{\otimes i})$  au groupe de cohomologie de Zariski  $H^0(X, \mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i}))$ , où  $\mathcal{H}^j(\mu_n^{\otimes i})$  désigne le faisceau de Zariski sur  $X$  associé au préfaisceau  $U \mapsto H^j(U, \mu_n^{\otimes i})$  (cf. [CT]).

On note  $H^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ , resp.  $H_{\text{nr}}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$  (resp.  $H^i(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ , resp.  $H_{\text{nr}}^i(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ ) la limite inductive des groupes  $H^i(X, \mu_n^{\otimes j})$ , resp.  $H_{\text{nr}}^i(X, \mu_n^{\otimes j})$  lorsque  $n$  varie parmi les entiers (resp. parmi les puissances d'un nombre premier  $l$ ,  $l \neq \text{car}.k$ ).

On note  $\mathbb{G}_m$  le groupe multiplicatif sur un schéma  $X$  et le faisceau étale ainsi défini. On écrit  $\text{Br } X = H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$  pour le groupe de Brauer cohomologique de  $X$  et  $\text{Pic}(X) = H_{\text{Zar}}^1(X, \mathcal{O}_X^*) \simeq H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_m)$  pour le groupe de Picard.

### 1.3 Rappels de $K$ -théorie

Pour  $X$  un schéma noethérien et  $j$  un entier positif on note  $\mathcal{K}_j$  le faisceau de Zariski associé au préfaisceau  $U \mapsto K_j(H^0(U, \mathcal{O}_U))$ , le groupe  $K_j(A)$  étant celui associé par Quillen [Q] à l'anneau  $A$ .

Lorsque  $X$  est une variété lisse sur un corps  $k$ , la conjecture de Gersten, établie par Quillen [Q], permet de calculer les groupes de cohomologie de Zariski  $H^i(X, \mathcal{K}_j)$  comme les groupes de cohomologie du complexe de Gersten. Lorsque  $j = 2$ , qui est le cas qui nous intéresse dans la suite, ce complexe s'écrit

$$K_2 k(X) \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} k(x)^* \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \mathbb{Z},$$

où l'application  $d_2$  est donnée par le symbole modéré et l'application  $d_1$  est obtenue par la somme des flèches diviseurs après normalisation des variétés considérées. On a ainsi  $H^0(X, \mathcal{K}_2) = \text{Ker } d_2$  et  $H^1(X, \mathcal{K}_2) = \text{Ker } d_1 / \text{Im } d_2$ .

Étant donné un corps  $k$ , le groupe  $K_2 k$  coïncide avec le groupe de  $K$ -théorie de Milnor  $K_2^M k$ , quotient de  $k^* \otimes_{\mathbb{Z}} k^*$  par le sous-groupe engendré par les éléments  $a \otimes b$  avec  $a + b = 1$ .

Cette description permet de voir que pour  $X$  une variété lisse sur un corps  $k$  on a une flèche naturelle

$$\text{Pic}(X) \otimes k^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2). \quad (1)$$

En effet, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
k(X)^* \otimes k^* & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} k^* & \longrightarrow & \text{Pic}(X) \otimes k^* & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \phi & & & & \\
K_2 k(X) & \xrightarrow{d_2} & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} k(x)^* & \xrightarrow{d_1} & \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \mathbb{Z} & & 
\end{array}$$

où la première ligne est obtenue à partir de la suite exacte définissant le groupe  $\text{Pic}(X)$  par tensorisation avec  $k^*$ . On vérifie que la composé  $d_1 \circ \phi$  vaut zéro, ce qui permet de définir la flèche  $\text{Pic}(X) \otimes k^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2)$  par chasse au diagramme.

## 2 Comparaison entre groupes de Chow en codimension deux et cohomologie non ramifiée en degré trois

Dans cette partie on donne la preuve du théorème suivant :

**Théorème 2.1.** *Soit  $X$  une  $\mathbb{Q}$ -variété projective et lisse, géométriquement rationnelle. Pour presque tout nombre premier  $p$ , la réduction  $X_p$  de  $X$  modulo  $p$  est bien définie et est une  $\mathbb{F}_p$ -variété projective et lisse, géométriquement rationnelle, telle que*

$$H_{\text{nr}}^3(X_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\sim} \text{Coker}[CH^2(X_p) \rightarrow CH^2(\bar{X}_p)^G]\{l\}$$

pour tout nombre premier  $l$ ,  $(l, p) = 1$ .

Pour démontrer ce théorème, on utilise le résultat suivant de B. Kahn ([K], Th.1 et corollaire p.3) :

**Théorème 2.2.** ([K]) *Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$ , de dimension cohomologique au plus 3. Soit  $X$  une  $k$ -variété projective et lisse. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i)  $K_2 \bar{k} \xrightarrow{\sim} H^0(\bar{X}, \mathcal{K}_2)$  ;
- (ii) le groupe  $H_{\text{nr}}^3(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$  est nul, resp. de torsion  $p$ -primaire si  $\text{car}.k > 0$ .

Alors on a une suite exacte naturelle, resp. exacte à la  $p$ -torsion près si  $\text{car}.k > 0$

$$\begin{aligned}
H^1(k, H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)) &\rightarrow \text{Coker}[H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \\
&\rightarrow \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G] \rightarrow H^2(k, H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)). \quad (2)
\end{aligned}$$

**Remarque 2.3.** Les groupes de cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$  sont bien définis en caractéristique positive (cf.[K]).

Il est ainsi nécessaire de vérifier les hypothèses (i) et (ii) pour une variété géométriquement rationnelle  $X$ . Les énoncés suivants, cas particuliers de [CT], 2.1.9 (cf. aussi 4.1.5), sont bien connus.

**Proposition 2.4.** *Soit  $k$  un corps. Soit  $X$  une  $k$ -variété projective et lisse,  $k$ -rationnelle. Alors*

- (i)  $H_{\text{nr}}^j(X, \mu_n^{\otimes i}) \simeq H^j(k, \mu_n^{\otimes i})$  pour tout  $j \geq 1$  ;
- (ii) l'application naturelle  $K_2 k \rightarrow H^0(X, \mathcal{K}_2)$  est un isomorphisme ;
- (iii) le groupe  $\text{Pic}(X)$  est libre de type fini.

L'énoncé suivant permet de comprendre le module galoisien  $H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)$ .

**Proposition 2.5.** *Soit  $k$  un corps de caractéristique nulle. Le noyau  $K(X)$  et le conoyau  $C(X)$  de l'application  $\text{Pic}(X) \otimes k^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2)$  sont des invariants birationnels des  $k$ -variétés projectives et lisses, géométriquement intègres. En particulier, l'application  $\text{Pic}(X) \otimes k^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2)$  est un isomorphisme pour  $X$  une variété projective et lisse,  $k$ -rationnelle.*

*Démonstration.* Considérons le complexe de groupes abéliens

$$\text{Pic}(X) \otimes k^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2).$$

Ce complexe est fonctoriel contravariant pour les morphismes dominants de variétés projectives et lisses. Le noyau  $K(X)$  et le conoyau  $C(X)$  de  $\text{Pic}(X) \otimes k^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2)$  sont alors des foncteurs contravariants pour de tels morphismes. Soit  $F$  l'un de ces foncteurs.

Soient  $X, Y$  deux variétés projectives et lisses, géométriquement intègres. Montrons qu'un morphisme birationnel  $X \rightarrow Y$  induit un isomorphisme  $F(Y) \rightarrow F(X)$ . D'après Hironaka, il existe deux  $k$ -variétés projectives et lisses  $X'$  et  $Y'$  et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

où les flèches verticales sont des suites d'éclatements de centres lisses. D'après le lemme ci-dessous,  $F(X)$  est isomorphe à  $F(X')$ , respectivement  $F(Y)$  est isomorphe à  $F(Y')$ . On en déduit par fonctorialité que  $F(X)$  est isomorphe à  $F(Y)$ .

Si maintenant on a une application rationnelle  $X \dashrightarrow Y$ , on utilise Hironaka pour trouver une variété projective et lisse  $Z$  avec  $Z \rightarrow X$  et  $Z \rightarrow Y$  deux morphismes birationnels. D'après ce qui précède,  $F(X) \simeq F(Z) \simeq F(Y)$ . Ainsi  $F(X)$  est un invariant birationnel des  $k$ -variétés projectives et lisses, géométriquement intègres.

Le fait que  $F(\mathbb{P}_k^n) = 0$  est bien connu. On établit d'abord que  $H^1(\mathbb{A}_k^1, \mathcal{K}_2) = 0$  et ensuite que  $H^1(\mathbb{A}_k^n, \mathcal{K}_2) = 0$  par des fibrations successives à fibres  $\mathbb{A}^1$ . L'énoncé pour  $\mathbb{P}_k^n$  s'en suit par récurrence, en se restreignant à l'hyperplan à l'infini.  $\square$

**Remarque 2.6.** On peut montrer plus généralement que pour  $X$  lisse sur un corps,  $H^i(\mathbb{A}_X^n, \mathcal{K}_j)$  est isomorphe à  $H^i(X, \mathcal{K}_j)$ , et donner une expression explicite de  $H^i(\mathbb{P}_X^n, \mathcal{K}_j)$  en termes de  $K$ -cohomologie de  $X$ , cf. [Sh].

**Lemme 2.7.** Soit  $k$  un corps. Soit  $X$  une  $k$ -variété projective et lisse, géométriquement intègre. Soit  $Z \subset X$  une sous-variété intègre, projective et lisse, de codimension au moins 2 et soit  $\pi : X' \rightarrow X$  l'éclatement de  $X$  le long de  $Z$ . Alors les applications  $K(X) \rightarrow K(X')$ , respectivement  $C(X) \rightarrow C(X')$ , sont des isomorphismes.

*Démonstration.* Soit  $Z'$  le diviseur exceptionnel de  $X'$  et soit  $U = X \setminus Z \simeq X' \setminus Z'$ . Supposons d'abord que  $Z$  est de codimension 2. On a les suites exactes horizontales de complexes verticaux :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & K_2k(X) & \longrightarrow & K_2k(U) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} k(x)^* & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in U^{(1)}} k(x)^* & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in U^{(2)}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & K_2k(X') & \longrightarrow & K_2k(U) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & k(Z')^* & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X'^{(1)}} k(x)^* & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in U^{(1)}} k(x)^* \longrightarrow 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in Z'^{(1)}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X'^{(2)}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in U^{(2)}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.
\end{array}$$

On a ainsi des suites longues induites en cohomologie :

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^0(U, \mathcal{K}_2) \rightarrow 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(U, \mathcal{K}_2) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \\
\rightarrow CH^2(X) \rightarrow CH^2(U) \rightarrow 0, \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow H^0(X', \mathcal{K}_2) \rightarrow H^0(U, \mathcal{K}_2) \rightarrow k^* \rightarrow H^1(X', \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(U, \mathcal{K}_2) \rightarrow \text{Pic}(Z') \rightarrow \\
\rightarrow CH^2(X') \rightarrow CH^2(U) \rightarrow 0. \quad (4)
\end{aligned}$$

Dans la suite (3), la flèche  $\mathbb{Z} \rightarrow CH^2(X)$  est donnée par  $1 \mapsto [Z]$ . En prenant l'intersection avec un hyperplan général, on voit que cette flèche est injective. Ainsi l'application  $H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(U, \mathcal{K}_2)$  est un isomorphisme.

Si  $Z$  est de codimension plus grande que 2, on a encore la suite (4) et les groupes  $H^1(X, \mathcal{K}_2)$  et  $H^1(U, \mathcal{K}_2)$  sont isomorphes, car ils ne dépendent que de points de codimension au plus 2.

Par fonctorialité, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{\simeq} & H^0(U, \mathcal{K}_2) \\ \downarrow & & \parallel \\ H^0(X', \mathcal{K}_2) & \hookrightarrow & H^0(U, \mathcal{K}_2). \end{array}$$

Ainsi l'application  $H^0(X', \mathcal{K}_2) \rightarrow H^0(U, \mathcal{K}_2)$  est un isomorphisme. En utilisant la suite (4), on obtient le diagramme commutatif de suites exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^1(X, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{\simeq} & H^1(U, \mathcal{K}_2) & & \\ & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & k^* & \longrightarrow & H^1(X', \mathcal{K}_2) & \longrightarrow & H^1(U, \mathcal{K}_2). \end{array}$$

On a donc une suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow k^* \rightarrow H^1(X', \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow 0.$$

Ainsi  $H^1(X', \mathcal{K}_2) \simeq H^1(X, \mathcal{K}_2) \oplus k^*$ . Puisque  $\text{Pic}(X') = \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \cdot [Z']$ , on en déduit l'énoncé du lemme.  $\square$

**Preuve du théorème 2.1.** Puisque  $X$  est une  $\mathbb{Q}$ -variété géométriquement rationnelle, il existe une extension finie  $K/\mathbb{Q}$  et une  $K$ -variété projective et lisse  $Z$ , deux morphismes  $K$ -birationnels  $Z \rightarrow X_K$  et  $Z \rightarrow \mathbb{P}_K^n$ , et deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X_K \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Z'' & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^n \end{array}$$

où les flèches verticales sont des suites d'éclatements de centres lisses. Pour presque toute place  $v$  de  $K$ , les centres d'éclatements admettent des réductions lisses et on a des diagrammes commutatifs induits sur le corps résiduel  $k(v)$ , donc sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ ,  $p = \text{car}.k(v)$ .

L'argument donné dans la preuve de la proposition 2.5 s'applique alors : pour presque tout nombre premier  $p$ , la réduction  $X_p$  de  $X$  modulo  $p$  est bien définie et est une  $\bar{\mathbb{F}}_p$ -variété projective et lisse, géométriquement rationnelle, telle que l'application  $\text{Pic}(\bar{X}_p) \otimes \bar{\mathbb{F}}_p^* \rightarrow H^1(\bar{X}_p, \mathcal{K}_2)$  est un isomorphisme.

Montrons que les hypothèses du théorème 2.2 sont satisfaites pour une telle réduction  $X_p$ . D'après la proposition 2.4,  $K_2 \bar{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\sim} H^0(\bar{X}_p, \mathcal{K}_2)$  car  $X_p$  est géométriquement rationnelle. De même,  $H_{\text{nr}}^3(\bar{X}_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = H^3(\bar{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$  car  $\bar{\mathbb{F}}_p$  est séparablement clos.

Montrons ensuite que le groupe  $H^i(\bar{\mathbb{F}}_p, H^1(\bar{X}_p, \mathcal{K}_2)) \simeq H^i(\bar{\mathbb{F}}_p, \text{Pic}(\bar{X}_p) \otimes \bar{\mathbb{F}}_p^*)$  est nul pour tout  $i \geq 1$ . D'après la proposition 2.4, le  $\mathbb{Z}$ -module  $\text{Pic}(\bar{X}_p)$  est libre

de type fini. Considérons une extension finie galoisienne  $L/\mathbb{F}_p$  qui déploie  $\text{Pic}(\bar{X}_p)$ . Considérons la suite de restriction-inflation :

$$0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(L/\mathbb{F}_p), \text{Pic}X_{p,L} \otimes L^*) \rightarrow H^1(\mathbb{F}_p, \text{Pic}\bar{X}_p \otimes \mathbb{F}_p^*) \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/L), \text{Pic}\bar{X}_p \otimes \bar{\mathbb{F}}_p^*).$$

On a  $H^1(\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/L), \text{Pic}\bar{X}_p \otimes \bar{\mathbb{F}}_p^*) = 0$  d'après le théorème de Hilbert 90. Puisque la dimension cohomologique de  $\mathbb{F}_p$  est 1,  $H^1(\text{Gal}(L/\mathbb{F}_p), \text{Pic}X_{p,L} \otimes L^*) = 0$  (cf. [S], p.170). On a donc  $H^i(\mathbb{F}_p, \text{Pic}(\bar{X}_p) \otimes \bar{\mathbb{F}}_p^*) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ .

Notons que  $H^3(\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$  car la dimension cohomologique de  $\mathbb{F}_p$  est 1. La suite (2) donne alors un isomorphisme :

$$H_{\text{nr}}^3(X_p, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\sim} \text{Coker}[CH^2(X_p) \rightarrow CH^2(\bar{X}_p)^G]\{l\}.$$

□

**Remarque 2.8.** En utilisant des résultats de [CTR], on peut montrer un énoncé plus général (cf. aussi [CTV]) :

*Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$ . Soit  $l$  un nombre premier,  $(l, p) = 1$ . Soit  $X$  une  $k$ -variété projective et lisse, géométriquement rationnelle. Supposons que la dimension cohomologique de  $k$  est au plus 1. Alors on a un isomorphisme  $H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\sim} \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G]\{l\}$ .*

Indiquons comment on procède pour la preuve. On utilise d'abord [CTR], 2.12 et 2.14 pour montrer que pour  $X$  une  $k$ -variété projective et lisse, géométriquement rationnelle, le noyau  $K(X)$  et le conoyau  $C(X)$  de l'application  $\text{Pic}(\bar{X}) \otimes \bar{k}^* \rightarrow H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)$  sont uniquement divisibles par tout entier premier à  $p = \text{cark}$ . Ici on a encore  $H^i(k, \text{Pic}(\bar{X}) \otimes \bar{k}^*) = 0$  pour  $i \geq 1$ , et on conclut comme dans la preuve du théorème 2.1.

L'utilisation de résultats de [CTR] fait appel à des techniques très élaborées. Pour ce dont on a besoin dans la suite, le théorème 2.1 suffit.

### 3 L'exemple

Dans cette partie, pour une infinité de nombres premiers  $p$ , on construit une variété projective et lisse géométriquement rationnelle  $X$ , définie sur le corps fini  $\mathbb{F}_p$ , telle que l'application

$$CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G$$

n'est pas surjective.

**Remarque 3.1.** Si  $X$  est une variété projective et lisse, géométriquement intègre, définie sur le corps fini  $\mathbb{F}_p$ , l'application  $CH^i(X) \rightarrow CH^i(\bar{X})^G$  est surjective pour  $i = 0, 1, d$ . Le cas  $i = 0$  est immédiat. Pour  $i = 1$ ,  $\text{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} CH^1(X)$  car  $X$  est lisse. Puisque  $X$  est projective et géométriquement intègre,  $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$  et la suite spectrale  $E_2^{pq} = H^p(G, H^q(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{G}_m)$  donne une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(\bar{X})^G \rightarrow H^2(G, \bar{k}^*) \rightarrow \text{Br } X.$$



Puisque le groupe  $H^2(G, \bar{k}^*) = \text{Br } k$  est nul pour un corps fini, on a la surjectivité pour  $i = 1$ . Plus généralement, il en est ainsi pour toute variété  $X$  projective et lisse, géométriquement intègre, avec un point rationnel, définie sur un corps  $k$  quelconque : pour une telle variété l'application  $H^2(G, \bar{k}^*) \rightarrow \text{Br } X$  est injective.

Pour  $i = d$ , c'est-à-dire dans le cas de zéro-cycles, on sait que  $X$  possède un zéro-cycle de degré 1 d'après les estimations de Lang-Weil (cf.[LW]). Il suffit donc de voir que l'application entre les groupes de Chow de zéro-cycles de degré zéro  $A_0(X) \rightarrow A_0(\bar{X})^G$  est surjective. Ceci résulte de la comparaison de ces derniers groupes avec les points rationnels (resp. les  $\bar{\mathbb{F}}_p$ -points) de la variété d'Albanese  $\text{Alb}_X$  de  $X$ . En effet, l'application  $A_0(X) \rightarrow \text{Alb}_X(\mathbb{F}_p)$  est surjective (cf. [KS], Prop. 9, p.274), et l'application  $A_0(\bar{X}) \rightarrow \text{Alb}_X(\bar{\mathbb{F}}_p)$  est un isomorphisme (cf.[R] et [M]).

D'après le théorème 2.1, si  $X$  est géométriquement rationnelle, il suffit d'assurer que le groupe  $H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$  est non nul pour un certain nombre premier  $l$ ,  $l \neq p$ . Dans l'article [CTOj], Colliot-Thélène et Ojanguren construisent de tels exemples sur le corps des complexes pour  $l = 2$ . Les variétés qu'ils construisent sont unirationnelles (c'est-à-dire, dominées par un ouvert de l'espace projectif). Via la proposition 2.4, ils obtiennent ainsi des exemples de variétés unirationnelles non rationnelles. Dans la suite, on utilise la méthode de [CTOj] pour produire des exemples sur les corps finis.

La stratégie est la suivante :

1. On considère une quadrique projective et lisse  $Q$  sur le corps  $F = \mathbb{F}_p(x, y)$ ,  $p \neq 2$ , définie dans  $\mathbb{P}_F^4$  par une équation homogène

$$x_0^2 - ax_1^2 - fx_2^2 + afx_3^2 - g_1g_2x_4^2 = 0 \quad (5)$$

où  $a \in \mathbb{F}_p$  est une constante et  $f, g_1, g_2 \in F$ . La quadrique  $Q$  admet un point rationnel sur  $\bar{\mathbb{F}}_p(x, y)$ , elle est donc  $\bar{\mathbb{F}}_p(x, y)$ -rationnelle.

2. On donne des conditions nécessaires sur les coefficients dans (5) pour que le cup-produit  $(a, f, g_1)$  soit non nul dans  $H_{\text{nr}}^3(Q, \mathbb{Z}/2)$ .
3. On vérifie que l'on peut trouver  $a \in \mathbb{Z}$  et  $f, g_1, g_2 \in \mathbb{Z}(x, y)$  tels que leurs réductions modulo  $p$  vérifient les conditions de l'étape précédente pour le corps  $\mathbb{F}_p$  pour une infinité de nombres premiers  $p$ . Par Hironaka, on trouve une variété projective et lisse  $X$  définie sur  $\mathbb{Q}$ , admettant une fibration sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$  de fibre générique la quadrique définie par (5). Pour presque tout  $p$ ,  $X$  admet une réduction  $X_p$  modulo  $p$  qui est lisse sur  $\mathbb{F}_p$  et pour une infinité de premiers  $p$  le groupe  $H_{\text{nr}}^3(X_p, \mathbb{Z}/2)$  est ainsi non nul.

### 3.1 Cohomologie des quadriques

On commence par citer un résultat d'Arason [A] sur la cohomologie des quadriques.

Soit  $k$  un corps,  $\text{car}.k \neq 2$ . Soit  $\phi$  une forme quadratique non dégénérée de dimension  $m$  définie sur  $k$ . On note  $X_\phi$  la quadrique projective et lisse dans  $\mathbb{P}_k^{m-1}$

définie par  $\phi$ . On appelle  $n$ -forme de Pfister sur  $k$  une forme quadratique de type  $\langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$ ,  $a_i \in k^*$ . Une forme quadratique non dégénérée  $\phi$  est dite «voisine de Pfister» s'il existe une forme de Pfister  $\phi'$  sur  $k$  et  $a \in k^*$  tels que  $\phi$  soit une sous-forme de  $a\phi'$  et que la dimension de  $\phi$  soit strictement supérieure à la moitié de la dimension de  $\phi'$ .

**Théorème 3.2.** (cf. [A]) *Soit  $k$  un corps, car  $k \neq 2$ . Soit  $\phi$  une forme quadratique définie sur  $k$ , voisine d'une 3-forme de Pfister  $\langle 1, -a_1 \rangle \otimes \langle 1, -a_2 \rangle \otimes \langle 1, -a_3 \rangle$ . Alors*

$$\ker[H^3(k, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^3(k(X_\phi), \mathbb{Z}/2)] = \mathbb{Z}/2(a_1, a_2, a_3), \quad (6)$$

chaque  $a_i$  étant identifié à sa classe dans  $H^1(k, \mathbb{Z}/2) \simeq k^*/k^{*2}$ .

Soit  $Q$  la quadrique définie sur le corps  $F = \mathbb{F}_p(x, y)$ ,  $p \neq 2$ , par l'équation homogène (5). D'après le théorème d'Arason,

$$\ker[H^3(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2)] = \mathbb{Z}/2(a, f, g_1g_2).$$

Pour trouver un élément non nul dans  $H_{\text{nr}}^3(Q, \mathbb{Z}/2)$ , on peut ainsi essayer de chercher un élément de  $H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ , différent de  $(a, f, g_1g_2)$  et qui devient non ramifié dans  $H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2)$ . On va choisir les éléments  $a, f, g_1$  et  $g_2$  pour que l'élément  $(a, f, g_1)$  convienne.

Faisons d'abord quelques rappels sur les calculs de résidus.

**Proposition 3.3.** ([CTOj], 1.3 et 1.4) *Soit  $A$  un anneau de valuation discrète, de corps des fractions  $K$  et de corps résiduel  $k$ . Soit  $j \geq 1$  un entier.*

1. *Soit  $\alpha \in H^j(A, \mathbb{Z}/2)$  et soit  $\alpha_0 \in H^j(k, \mathbb{Z}/2)$  son image par l'application de réduction. Soit  $b \in K^*$  de valuation  $m$  dans  $A$  et soit  $\beta$  la classe de  $b$  dans  $H^1(K, \mathbb{Z}/2)$ . Alors  $\partial_A(\alpha \cup \beta) = m\alpha_0$ .*
2. *Soit  $\alpha \in H^j(K, \mathbb{Z}/2)$  et soit  $b \in A^*$  dont la classe est un carré dans  $k$ . Soit  $\beta$  la classe de  $b$  dans  $H^1(K, \mathbb{Z}/2)$ . Alors  $\partial_A(\alpha \cup \beta) = 0$ .*

On décrit ensuite les conditions qu'on va imposer sur les coefficients de la quadrique  $Q$  :

**Proposition 3.4.** *Soit  $F = \mathbb{F}_p(x, y)$  le corps des fractions rationnelles à deux variables sur le corps fini  $\mathbb{F}_p$ . Soit  $a \in \mathbb{F}_p^* \setminus \mathbb{F}_p^{*2}$  et soient  $f, g_1, g_2 \in F$  non nuls. Soit  $Q$  la quadrique lisse dans  $\mathbb{P}_F^4$  d'équation homogène*

$$x_0^2 - ax_1^2 - fx_2^2 + afx_3^2 - g_1g_2x_4^2 = 0.$$

*Supposons*

1. *pour tout  $i = 1, 2$ , il existe un anneau de valuation discrète  $B_i$  de corps des fractions  $F$ , tel que  $\partial_{B_i}(a, f, g_i) \neq 0$  ;*
2. *pour tout anneau de valuation discrète  $B$  de corps des fractions  $F$ , associé à un point de codimension 1 de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^2$ , soit  $\partial_B(a, f, g_1) = 0$ , soit  $\partial_B(a, f, g_2) = 0$ .*

3. pour tout anneau de valuation discrète  $B$  de corps des fractions  $F$ , centré en un point fermé  $M$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^2$ , quitte à la multiplier par un carré dans  $F^*$ , l'une au moins des fonctions  $f, g_1, g_2$  est inversible en  $M$ .

Alors l'image  $\xi_{F(Q)}$  du cup-produit  $\xi = (a, f, g_1)$  dans  $H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2)$  est un élément non nul de  $H_{\text{nr}}^3(Q, \mathbb{Z}/2)$ .

*Démonstration.* Notons d'abord que  $(a, f, g_1)$  est non nul dans  $H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2)$ . Sinon, d'après le théorème 3.2, on a soit  $(a, f, g_1) = 0$ , soit  $(a, f, g_1) = (a, f, g_1 g_2)$ . Ainsi soit  $(a, f, g_1) = 0$ , soit  $(a, f, g_2) = 0$ , contradiction avec la condition 1.

Montrons que

pour tout anneau de valuation discrète  $B$  de  $F$ ,

$$\text{soit } \partial_B(a, f, g_1) = 0, \text{ soit } \partial_B(a, f, g_2) = 0. \quad (*)$$

Pour un tel anneau  $B$  on dispose d'un morphisme  $\text{Spec } B \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^2$  et les cas 2 et 3 correspondent à deux possibilités pour l'image du point fermé de  $B$ . La condition 2 assure (\*) si cette image est un point de codimension 1 de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^2$ . Sinon l'image du point  $\text{Spec } k_B$  est un point fermé  $M$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^2$ . Soit  $\mathcal{O}_M$  l'anneau local de  $M$ , son corps des fractions est  $F$ . On dispose d'un morphisme d'anneaux  $\mathcal{O}_M \rightarrow B$ .

On peut supposer, sans perte de généralité, que la fonction  $g_1$  est inversible dans  $\mathcal{O}_M$ , quitte à la multiplier par un carré. Ainsi la fonction  $g_1$  est inversible dans  $B$ . Soit  $m$  la valuation de  $f$  dans  $B$ . D'après 3.3.1,  $\partial_B(a, f, g_1) = \partial_B(g_1, a, f) = m(\bar{g}_1, \bar{a})$ , où l'on note  $\bar{g}_1$  (resp.  $\bar{a}$ ) la classe de  $g_1$  (resp.  $a$ ) dans  $H^1(k_B, \mathbb{Z}/2)$ . Comme  $g_1$  et  $a$  sont inversibles dans  $\mathcal{O}_M$ , ces dernières classes proviennent de classes dans  $H^1(k_M, \mathbb{Z}/2)$ . Ainsi  $(\bar{g}_1, \bar{a})$  provient d'un élément de  $H^2(k_M, \mathbb{Z}/2)$ . Ce dernier groupe est nul, car  $k_M$ , étant un corps fini, est de dimension cohomologique 1. Ainsi  $\partial_B(a, f, g_1) = 0$ .

Montrons maintenant que  $\xi_{F(Q)}$  est non ramifié. Soit  $A$  un anneau de valuation discrète de  $F(Q)$  de corps résiduel  $k_A$ . Si  $A$  contient  $F$ , alors  $\xi_{F(Q)}$  provient d'un élément de  $H^3(A, \mathbb{Z}/2)$  et son résidu est donc nul. Supposons que  $A$  ne contient pas  $F$ . Alors  $B = A \cap F$  est un anneau de valuation discrète de  $F$ . Soit  $k_B$  son corps résiduel. On a le diagramme commutatif suivant (cf. [CTOj], §1) :

$$\begin{array}{ccc} H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\partial_A} & H^2(k_A, \mathbb{Z}/2) \\ \uparrow \text{res}_{F/F(Q)} & & \uparrow e_{B/A} \text{res}_{k_B/k_A} \\ H^3(F, \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\partial_B} & H^2(k_B, \mathbb{Z}/2). \end{array}$$

D'après ce qui précède,  $\partial_B(a, f, g_i) = 0$  pour  $i = 1$  ou pour  $i = 2$ . Si  $\partial_B(a, f, g_1) = 0$ , alors  $\partial_A(a, f, g_1) = 0$  d'après le diagramme ci-dessus. Supposons que  $\partial_B(a, f, g_2) = 0$ . Ainsi  $\partial_A(a, f, g_2) = 0$ . Comme  $(a, f, g_1 g_2)$  est nul dans  $H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2)$ , son résidu l'est aussi dans  $H^2(k_A, \mathbb{Z}/2)$ . On a donc  $\partial_A(a, f, g_1) = \partial_A(a, f, g_1 g_2) - \partial_A(a, f, g_2) = 0$ . Ainsi  $\xi_{F(Q)}$  est non ramifié.  $\square$

### 3.2 Construction explicite

On procède maintenant à la construction des exemples.

Soit  $k$  un corps. Dans la suite, on va prendre  $k = \mathbb{F}_p$  ou  $k = \mathbb{Q}$ . On fixe  $x, y, z$  des coordonnées homogènes pour  $\mathbb{P}_k^2$ . Soit  $a \in k^* \setminus k^{*2}$ . Soient  $b_i, c_i, d_i \in k^* \setminus \{-1\}$ ,  $i = 1, 2$ , et soit  $l_i = b_i x + c_i y + d_i z$ . Soient  $h_j$ ,  $j = 1, \dots, 8$ , les formes linéaires  $e_x x + e_y y + e_z z$ ,  $e_x, e_y, e_z \in \{0, 1\}$ .

On choisit  $b_i, c_i, d_i$  de sorte que :

- (i) Les droites dans  $\mathbb{P}_k^2$  données par les équations  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $l_i + h_j = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, 8$ , soient deux à deux distinctes.
- (ii) Pour tous  $1 \leq j, j' \leq 8$  les trois droites  $x = 0$ ,  $l_1 + h_j = 0$ ,  $l_2 + h_{j'} = 0$  dans  $\mathbb{P}_k^2$  sont d'intersection vide.
- (iii) Pour tous  $1 \leq j, j' \leq 8$  les trois droites  $y = 0$ ,  $l_1 + h_j = 0$ ,  $l_2 + h_{j'} = 0$  dans  $\mathbb{P}_k^2$  sont d'intersection vide.

On prend pour  $f, g_1, g_2 \in k(\mathbb{P}_k^2)$  les éléments suivants :

$$f = \frac{x}{y}, \quad g_1 = \frac{\prod_j (l_1 + h_j)}{y^8}, \quad g_2 = \frac{\prod_j (l_2 + h_j)}{z^8}. \quad (7)$$

**Remarque 3.5.** Soit  $h_j = e_x x + e_y y + e_z z$ . Les droites  $x = 0$ ,  $l_1 + h_j = 0$  s'intersectent en un seul point  $[0 : (c_1 + e_y) : (d_1 + e_z)]$ . Ainsi les conditions (ii) et (iii) ci-dessus sont équivalentes aux conditions suivantes :

(ii') les ensembles

$$\{[(c_1 + e_y) : (d_1 + e_z)], e_y, e_z \in \{0, 1\}\} \text{ et } \{[(c_2 + e_y) : (d_2 + e_z)], e_y, e_z \in \{0, 1\}\}$$

sont d'intersection vide ;

(iii') de même,

$$\{[(b_1 + e_x) : (d_1 + e_z)], e_x, e_z \in \{0, 1\}\} \cap \{[(b_2 + e_x) : (d_2 + e_z)], e_x, e_z \in \{0, 1\}\} = \emptyset.$$

Si  $k = \mathbb{Q}$  ou  $k = \mathbb{F}_p$  un corps fini avec  $p \geq 13$ , on peut prendre par exemple

$$l_1 = x + y + 2z, \quad l_2 = 3x + 3y + z.$$

**Proposition 3.6.** Soit  $F = \mathbb{F}_p(x, y)$  le corps des fractions rationnelles à deux variables sur le corps fini  $\mathbb{F}_p$ . Soit  $Q$  la quadrique lisse dans  $\mathbb{P}_F^4$  d'équation homogène

$$x_0^2 - ax_1^2 - fx_2^2 + afx_3^2 - g_1g_2x_4^2 = 0$$

avec  $a \in \mathbb{F}_p^* \setminus \mathbb{F}_p^{*2}$  et  $f, g_1, g_2$  définis comme dans (7) pour  $k = \mathbb{F}_p$ . Alors le groupe  $H_{\text{nr}}^3(Q, \mathbb{Z}/2)$  est non nul.

*Démonstration.* Notons  $A_x$ , resp.  $A_y$ , resp.  $A_z$ , resp.  $B_{i,j}$ , l'anneau de valuation discrète associé au point générique de la droite  $x = 0$ , resp.  $y = 0$  resp.  $z = 0$ , resp.  $l_i + h_j = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, 8$ .

Il s'agit de vérifier les conditions 1, 2 et 3 de la proposition 3.4. Soit  $B$  un anneau de valuation discrète de  $F$ . On a les cas suivants à considérer :

1.  $B$  correspond à un point de codimension 1 de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^2$ .
  - (a) Si  $B$  est différent de  $A_x, A_y, A_z, B_{i,j}$ , le résidu  $\partial_B(a, f, g_i)$ ,  $i = 1, 2$ , est nul, puisque les fonctions  $a, f, g_1, g_2$  sont inversibles dans un tel anneau  $B$ .
  - (b)  $B = B_{i,j}$ . Si  $r \neq i$ ,  $r = 1, 2$ , alors  $\partial_{B_{r,j}}(a, f, g_i) = 0$  comme le cas précédent. Fixons  $i \in \{1, 2\}$ . Montrons que  $\partial_{B_{i,j}}(a, f, g_i) \neq 0$ . Supposons  $h_j = 0$ , les autres cas sont identiques. Soit  $k$  le corps résiduel de  $B_{i,0}$ , i.e. le corps des fonctions de la droite  $b_i x + c_i y + d_i z = 0$ ,  $b_i, c_i, d_i \in k^*$  (pour  $h_j$  différent de zéro on utilise ainsi l'hypothèse que  $b_i, c_i, d_i$  sont différents de  $-1$ ). D'après le lemme 3.3.1,  $\partial_{B_{i,0}}(a, f, g_i) = (a, \frac{x}{y}) \in H^2(k, \mathbb{Z}/2)$ . Après passage à des coordonnées affines, on est réduit à établir que le cup-produit  $(a, x)$  n'est pas nul dans  $H^2(\mathbb{F}_p(x), \mathbb{Z}/2)$ . On le voit par exemple en appliquant le lemme 3.3.1 à l'anneau de valuation discrète associé à  $x = 0$  :  $a \in \mathbb{F}_p$  est non carré.
  - (c)  $B = A_x$ . Montrons que  $\partial_{A_x}(a, f, g_i) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Soit  $k_x$  le corps résiduel de  $A_x$ , i.e. le corps des fonctions de la droite  $x = 0$ . D'après le lemme 3.3.1,  $\partial_{A_x}(a, f, g_i) = -\partial_{A_x}(a, g_i, f) = -(a, g_{i,x}) \in H^2(k_x, \mathbb{Z}/2)$ , où  $g_{i,x}$  désigne la fonction induite par  $g_i$  sur la droite  $x = 0$ . Mais  $g_{i,x}$  est un carré dans  $k_x$ , d'où  $\partial_{A_x}(a, f, g_i) = 0$  d'après 3.3.2.
  - (d)  $B = A_y$ . Comme dans le cas précédent,  $\partial_{A_y}(a, f, g_2) = (a, g_{2,y}) = 0$ .
  - (e)  $B = A_z$ . Alors  $\partial_{A_z}(a, f, g_1) = 0$ , car les fonctions  $a, f, g_1$  sont inversibles dans  $A_z$ .
2.  $B$  correspond à un point fermé  $M$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^2$ .
  - (a) Si  $M$  n'est pas situé sur une des deux droites  $x = 0$ ,  $y = 0$ , alors  $f$  est inversible dans  $B$ .
  - (b) Si  $M$  est situé sur une des deux droites  $x = 0$ ,  $y = 0$ , alors l'une au moins des fonctions  $g_1 \frac{y^8}{z^8}$ ,  $g_2$  est inversible dans  $B$  d'après les hypothèses (ii)-(iii), car le système  $xy = 0, \prod_j (l_1 + h_j) = 0, \prod_j (l_2 + h_j) = 0$  n'a pas de solutions.

□

On finit par décrire explicitement les exemples énoncés.

**Théorème 3.7.** Soit  $Q$  la quadrique lisse dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}(x,y)}^4$  d'équation homogène

$$x_0^2 - ax_1^2 - fx_2^2 + afx_3^2 - g_1g_2x_4^2 = 0$$

avec  $a \in \mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Q}^{*2}$  et  $f, g_1, g_2$  définis comme dans (7) pour  $k = \mathbb{Q}$ . Soit  $X$  un modèle projectif et lisse de  $Q$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$  :  $X$  est une  $k$ -variété projective et lisse et admet une

fibration sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$  à fibre générique  $Q$ . Pour une infinité de nombres premiers  $p$ , la réduction  $X_p$  de  $X$  modulo  $p$  est bien définie et est une  $\mathbb{F}_p$ -variété projective et lisse, telle que :

- (i)  $H_{\text{nr}}^3(X_p, \mathbb{Z}/2) \neq 0$  ;
- (ii) l'application  $CH^2(X) \rightarrow CH^2(\bar{X})^G$  n'est pas surjective.

*Démonstration.* D'après Hironaka, un modèle projectif et lisse  $X$  de  $Q$  comme dans l'énoncé existe. De plus, pour une infinité de nombres premiers  $p$ , l'image de  $a$  dans  $\mathbb{F}_p$  n'est pas un carré (par Chebotarev, ou par application de la loi de réciprocité quadratique) et la variété  $X$  a bonne réduction en  $p$  :  $X_p$  est lisse. D'après la proposition 3.6, le groupe  $H_{\text{nr}}^3(X_p, \mathbb{Z}/2)$  est non nul. Le théorème 2.1 permet de conclure.  $\square$

## Références

- [A] J.Kr. Arason, *Cohomologische invarianten quadratischer Formen*, J. Algebra **36** (1975), no. 3, 448–491.
- [CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras* (Santa Barbara, CA, 1992), 1–64, Proc. Sympos. Pure Math., **58**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [CTOj] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), no. 1, 141–158.
- [CTR] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind,  *$K_2$ -cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), no. 2, 165–199.
- [CTV] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, *Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière*, en préparation.
- [G] T. Geisser, *Bass's conjectures and Tate's conjecture over finite fields*, en préparation.
- [K] B. Kahn, *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. **1** (1996), No. 17, 395–416.
- [KS] K. Kato and S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 2, 241–275.
- [LW] S. Lang et A. Weil, *Number of points of varieties in finite fields*, Amer. J. Math. **76**, (1954). 819–827.
- [M] J.S. Milne, *Zero cycles on algebraic varieties in nonzero characteristic : Rojzman's theorem*, Compositio Math. **47** (1982), no. 3, 271–287.
- [Q] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory I*, Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pp. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. **341**, Springer, Berlin 1973.

- [R] A. A. Rojtman, *The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 3, 553–569.
- [S] J-P. Serre, *Corps locaux*, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, 1968.
- [Sh] C. Sherman, *K-cohomology of regular schemes*, Comm. Algebra **7** (1979), no. 10, 999–1027.